Riflessionisparse sulla didattica della matematica

di Paola Guazzaloca

Frasi celebri

- Mathemata mathematicos scribuntur (la matematica è scritta per i matematici) (Copernico)
- Il motore dell'invenzione matematica non è la ragione ma l'immaginazione (A. De Morgan)
- La Matematica è un gioco che segue semplici regole che riguardano segni privi di senso (D. Hilbert)
- La matematica è l'arte di dare lo stesso nome ad oggetti diversi (H.Poincarè)

Stereotipi sulla matematica

Possibile origine culturale → dibattito del 1900 Croce/Gentile versus Enriquez

- Scienza solo valore pratico
- Matematica scienza "perfetta" ma arida e distante
- Per insegnare matematica basta conoscernene i contenuti

Versione moderna

La scienza rispettata per la sua utilità

Stereotipi sulla matematica

Ora (nell'immaginario collettivo):

- La scienza rispettata per la sua utilità
- Matematica corpo di conoscenze stabilite una volta per tutte:
 - pura astrazione
 - applicazioni viste come rigide risposte a situazioni standard

cioè

una scienza morta

Una visione diversa

Considerare l'apprendimento in matematica come il risultato dell'intreccio di fattori di tipo diverso quali :

- Conoscenze
- Convinzioni
- Emozioni
- Atteggiamenti
- Considerare la matematica come un organismo vivo che si evolve nel tempo

"..larga visione dei problemi matematici"

(Emma Castelnuovo)

Visione della Matematica nell'800:

"..un'immensa costruzione racchiusa entro una cinta di mura e formata da tanti palazzi più o meno alti, alcuni terminati alcuni la maggior parte ancora in lavorazionePalazzi non isolati si poteva entrare dalla porta ma più interessante un sistema di *ponti*, *passerelle*, *ballatoi* congiungeva piani alti con piani bassi di case diverse intersecandosi, sovrapponendosi, intrecciandosi.

".... larga visione dei problemi matematici" (Emma Castelnuovo)

I palazzi sono i vari capitoli della matematica: algebra, geometria, analisi (ecc..) ed i ponti indicano che i vari capitoli non sono isolati, ma tante relazioni permettono di passare da una teoria all'altra."

Matematica vista come fortezza medioevale ma costruita con il sapere di circa 2000 anni

"..larga visione dei problemi matematici" (Emma Castelnuovo)

La visione odierna della Matematica

" scienza volta ad analizzare materiale di cui sono fatti i palazzi e la struttura dei palazzi fin dalle fondamenta tentando di cogliere le strutture uguali che si trovano in architetture differenti ..."

"... larga visione dei problemi matematici" (Emma Castelnuovo)

Matematica "classica":

- studio dei singoli capitoli della matematica e sugli elementi base delle singole teorie
- elementi base → oggetti :numero, retta, tentando in qualche modo un'interpretazione del sensibile

"... larga visione dei problemi matematici" (Emma Castelnuovo)

Matematica "Moderna"

- studio delle leggi operative usate per la costruzione delle fondamenta
- si analizzano i diversi sistemi di regole applicabili ciascuno a modelli fra loro diversi
- gli enti matematici vivono solo in funzione delle leggi del sistema.

"... larga visione dei problemi matematici" (Emma Castelnuovo)

Riflessioni per il docente

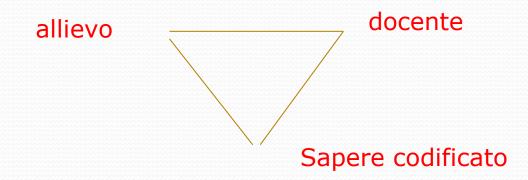
- Matematica un corpo vivo che subisce alti e bassi e che nella sua costruzione "teorica" può anche entrare in crisi.
- Consapevolezza delle varie sfaccettature degli argomenti presentati agli allievi
- Necessità di mediare didatticamente i salti che hanno caratterizzato il processo di formazione del sapere

Insegnamento

Il processo dell'insegnare avviene attraverso una relazione complessa che coinvolge 'insegnante e l'alunno ma anche il sapere da trasmettere.

Un modello di relazione

un triangolo i cui vertici sono l'allievo, l'insegnante ed il sapere



Insegnamento

Modello di relazione

il lato allievo-sapere cioè l'apprendimento si costruisce

- non solo attraverso la relazione pedagogica insegnante-allievo,
- ma anche attraverso la relazione (epistemologica) insegnante-sapere.

insegnamento

"L'educazione matematica deve contribuire, insieme con tutte le altre discipline, alla formazione culturale del cittadino, in modo da consentirgli di partecipare alla vita sociale con consapevolezza e capacità critica. Le competenze del cittadino, al cui raggiungimento concorre l'educazione matematica, sono per esempio: esprimere adeguatamente informazioni, intuire e immaginare, risolvere e porsi problemi, progettare e costruire modelli di situazioni reali, operare scelte in condizioni d'incertezza...." (UMI 2003)

insegnamento

- la conoscenza di tecniche di calcolo (le tecniche delle operazioni, certi formalismi di calcolo letterale o di formule trigonometriche...) abbia meno peso rispetto all'abilità di modellizzare una situazione o simili
- Le tecniche interessano in quanto strumento utile per i collegamenti, le connessioni, l'abilità mentale, ecc., all'interno di una visione dell'apprendimento che comprende l'esercizio ma soprattutto richiede la comprensione di concetti operativi non banali (le operazioni, la notazione posizionale, l'uso del calcolo letterale o le relazioni fra enti) e aiuta chi apprende ad integrare questi due aspetti.

apprendere

"APPRENDERE" in Matematica → quattro componenti:

- apprendimento dei concetti (noetica)
- apprendimento di algoritmi
- apprendimento di strategie (es. la risoluzione di problemi)
- apprendimento comunicativo (es. la validazione, l'argomentazione, la dimostrazione).

apprendere

Le competenze : cosa sono

• I NUCLEI FONDANTI IN GENERALE E NELLA DISCIPLINA MATEMATICA

Competenza...matematica definizioni

Forum delle discipline 2000 Competenze

ciò che, in un contesto dato, si sa fare (abilità) sulla base di un sapere (conoscenze), per raggiungere l'obiettivo atteso e produrre conoscenza;

è quindi la disposizione a scegliere, utilizzare e padroneggiare le conoscenze, capacità e abilità idonee, in un contesto determinato, per impostare e/o risolvere un problema dato"

Competenza...matematica definizioni

Pellerey, 2003

Competenza

"un sistema coordinato di conoscenze e abilità che sono mobilitate dal soggetto in relazione ad uno scopo (un compito, un insieme di compiti o un'azione) che lo interessano e che favoriscono buone disposizioni interne motivazionali e affettive "

Definizioni

Saperi e Conoscenze

- i <u>saperi</u> consistono nei dati, concetti, procedure, metodi che esistono al di fuori di ogni soggetto che conosce e che sono generalmente codificati dalla ricerca scientifica e comunicati in opere di riferimento: manuali, enciclopedie, dizionari
- le <u>conoscenze</u> sono indissociabili dal soggetto conoscente; una persona, che interiorizza un sapere prendendone coscienza, trasforma questo sapere in conoscenza

Definizioni

Abilità

 Interpretabili come "saper fare". Alcuni studiosi (es Sbaragli) evidenziano la difficoltà per la matematica nel separare la conoscenza dal saper fare

Disposizioni interne

 assimilate all'espressione "saper essere". Si riferiscono a caratteristiche personali di tipo motivazionale o sociale, a volontà, emozioni, fatti affettivi e sono relative a sistemi di concezioni e valori che orientano e sostengono il soggetto ad operare in un certo modo. Nella costruzione di competenza si pone quindi al centro il soggetto stesso e la sua "intenzione" di impegnarsi a decontestualizzare e ricontestualzzare le sue conoscenze e le sue abilità (Pellerey 2006)

Competenza...matematica Definizioni

Quasi una ... conclusione

la competenza "appartiene all'allievo" è un obiettivo per l'allievo ed nel binomio insegnamento - apprendimento pone il focus sull'apprendimento

due accezioni "disciplinari" del termine competenza:

- Competenza in matematica si centra sulla disciplina come scienza costituita, vista all'interno di uno specifico ambito scolare
- Competenza matematica si raggiunge quando un individuo vede, interpreta e si comporta nel mondo in senso matematico

Competenze trasversali, (o generali o di base), legate ai diritti di cittadinanza:

- Saper leggere l'informazione
- Saper comunicare
- Saper rappresentare
- Saper ragionare.

Competenze matematiche

(traduzione delle competenze trasversali generali)

- saper leggere l'informazione
 - avere il senso del numero e del simbolo
 - leggere e comprendere diverse forme di rappresentazione
- saper comunicare
 - padroneggiare le diverse forme espressive della matematica (retorica, grafica, simbolica,)
 - usare un linguaggio appropriato (in termini di definizioni, enunciati, ipotesi, ...)

Competenze matematiche

- Saper rappresentare
 - dati, informazioni, funzioni utilizzando diversi linguaggi e strumenti della matematica e dell'informatica
 - Costruire modelli interpretativi di situazioni reali
- Saper ragionare
 - Contare e avere la consapevolezza delle operazioni
 - Risolvere problemi aperti o chiusi
 - Produrre congetture, confutandole o dimostrandole.
- Utilizzare le tecnologie consapevolmente trasversale alle precedenti

Definizioni

Nuclei Fondanti

" concetti fondamentali che ricorrono in vari luoghi di una disciplina e hanno perciò valore strutturante e generativo di conoscenze" Sono la struttura formativa di una disciplina

Forum delle discipline (2000)

CARATTERISTICHE PRINCIPALI DEI "NUCLEI"

- verticalità, ossia lo sviluppo per l'intero arco di studi, o per una sua buona parte
- orizzontalità, ossia la possibilità di evidenziare collegamenti tra un nucleo e l'altro, immagine della conoscenza come una "navigazione in un mare"
- avvicinamento graduale alla teoria, a partire dal percettivo, attraverso stadi intermedi di approccio agli oggetti matematici e alle loro proprietà fondamentali

Matematica nuclei fondanti

- nucleo fondante → contenuti chiave per la struttura stessa della disciplina, non sul piano meramente didattico, quanto sul piano fondazionale, epistemologico
- quali → ad es :numero, misura, dati e previsioni, Introduzione al pensiero razionale.

Obiettivo didattico per il docente → elaborare strategie didattiche nelle quali lo studente viene non attirato a prendere in esame catene di contenuti, ma a partecipare alla costruzione delle proprie competenze

Scelta dei nuclei legato all'obiettivo competenza da attivare

- Numeri: operazioni
- Grandezze (matematiche e fisiche): misura
- Figure: trasformazioni
- Relazioni, funzioni: rappresentazioni
- Dati: analisi e previsioni
- Linguaggio scientifico: congetture e dimostrazioni.

(Italia)

Sviluppo nuclei possibile ipotesi

Contare	Insiemi numerici, operazioni	L'aritmetica
Misurare	Diversi tipi di misura	La misura
Osservare Operare	Gli oggetti geometrici le proprietà	Le geometrie
Rappresentare	Relazioni successioni funzioni	Analisi
Organizzare	Modelli di previsioni	Calcolo probabilità
Comunicare	Uso consapevole linguaggio scientifico	Logica a fondamento di matematica ed informatica

Valutare (il contesto) significa misurare:

- l'efficacia della propria azione didattica → giudizi sulle funzionalità delle scelte metodologiche
- l'opportunità della scelta di un dato segmento curricolare per trarre giudizi sulla efficacia della trasposizione didattica
- lo stato cognitivo di ogni singolo allievo che permette di trarre indicazioni sul passaggio da "sapere insegnato" a "sapere appreso" e dunque sulla congruenza tra "curricolo auspicato" e "curricolo effettivo"

due "macro obiettivi della valutazione in M

- 1. <u>conoscenze</u> (Statica) effettuata tramite un test di controllo, dall'insegnante o dall'esterno. Un risultato deviante rispetto a quello atteso dimostra <u>solo</u> che non c'è congruenza tra quanto atteso e quanto di fatto ottenuto.
- 2. <u>competenze</u> legata ad un aspetto dinamico dell'apprendimento. La competenza, poiché implica un processo, non è ricavabile da un "flash" e non risulta valutabile se non da prove ripetute nel tempo

Attività didattica

Attività didattiche significative

"... coinvolgimento allievo e introduzione motivata di strumenti culturali della matematica per studiare fatti e fenomeni attraverso un approccio quantitativo, se contribuisce alla costruzione dei loro significati e se dà senso al lavoro riflessivo su di essi .."

" ... il loro fine è la costruzione delle capacità di esercitare un controllo sulla realtà secondo i modelli della razionalità scientifica."

(UMI CIIM 2003)

Attività didattica

Gli approcci metodologici possono essere vari ma dovrebbero:

- essere caratterizzati dal coinvolgimento in varia misura di studenti e insegnanti,
- mirare a dare al processo di insegnamentoapprendimento prevalentemente una caratterizzazione di tipo collettivo, impostandola sull'interazione tra gli studenti e tra insegnante e studenti.

Attività didattica LEZIONE FRONTALE

- tecnica "storicamente più sicura" per tutti gli attori scolastici, letta come garanzia di "finire il programma"
- spiegazione, da parte dell'insegnante, di non sempre tutte le – varie parti del programma, alla cattedra o alla lavagna;
 - è seguita da una serie di attività applicative (gli esercizi ripetitivi, in classe e a casa).

LEZIONE FRONTALE

valenza didattica → abituare gli studenti

- a prestare attenzione a una spiegazione
- a imparare a prendere appunti in maniera autonoma, quando una persona parla
- a sviluppare competenze di sintesi e di organizzazione dell'informazione
- a comprendere un discorso fatto da un esperto su un argomento matematico

Insegnamento per Problemi

 Porre problemi agli studenti, facendoli loro risolvere singolarmente, a gruppi, a casa o in classe, in tempi lunghi o brevi

- Problema (due interpretazioni)
 - la richiesta di ottenere un risultato a seguito di una serie di calcoli,
 - proposta di riconoscere una situazione problematica di ampia natura, formulata da altri: un classico problema che ha caratterizzato la storia della matematica oppure di un problema sorto da un contesto scolastico oppure da un contesto extrascolastico, ambientale

Insegnamento per Problemi

- risolvere problemi → competenza che si acquisisce nel tempo
- porsi problemi, ovvero acquisire a poco a poco l'abitudine a porsi criticamente nei confronti realtà come persona, che utilizza consapevolmente le tecniche matematiche



<u>insegnamento dei contenuti</u> di tutti i nuclei deve poggiarsi sulla <u>problematicità</u>, perseguendo il raggiungimento di <u>abilità tecniche</u> e di <u>ragionamento</u>.

Altre Possibili Metodologie

- Il lavoro di gruppo in classe
- La discussione matematica anche con l'intervento di esperti esterni
- Il laboratorio di matematica inteso non come luogo fisico diverso dalla classe, ma insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici. Il laboratorio coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche,).

Strumenti del Laboratorio di Matematica

- Materiali poveri (fogli trasparenti, quadrettati, carta, spilli... es attività sulle isometrie nel 1° biennio sec di 2° grado)
- Macchine matematiche (es. quelle che generano curve) funzionali all'attività manipolatoria
- Software di geometria e di manipolazione simbolica. Sono ambienti in cui gli studenti possono fare esperienza di fatti geometrici o demandare ad esempio l'esecuzione di calcoli elaborati

Strumenti Laboratorio di Matematica

- Fogli elettronici → da utilizzare soprattutto per elaborare dati rappresentare grafici
- La storia della matematica → consapevolezza delle concatenazioni a base dello sviluppo delle teorie ma soprattutto dei punti critici e delle crisi che lo hanno caratterizzato

insegnamento

ERRORI

 distanza fra le nozioni matematiche comuni e i concetti matematici sottostanti
Es distanza fra le formule per il calcolo dell'area delle superfici piane (più o meno elementari) e la teoria della misura o quella del calcolo integrale

Quale possibile percorso per riempire la distanza

insegnamento

ERRORI

Un possibile approccio (Freudenthal)

- Oggetti mentali sono invece delle "nozioni di tipo matematico, che appartengono al pensiero comune e che sono intermediarie fra questo e la matematica costituita (strumento didattico)
- <u>Concetti</u> sono gli oggetti tecnicamente definiti in una teoria assiomatica (obiettivo finale)

insegnamento

ERRORI possibili sul percorso:

- si può scegliere di trascurare gli oggetti mentali, come mal costruiti e poco significativi matematicamente, e puntare subito sui concetti matematici
- si può introdurre concetti troppo astratti, con almeno le principali applicazioni, insegnando così "concetti importanti, dalla forte connotazione tecnica, in contesti poveri, in modo che gli allievi non possano cogliere le ragioni di questo tecnicismo"

Didattica

Errori/Difficoltà

Agli studenti del 1º anno di un Istituto tecnico professionale per il commercio in una cittadina della Lombardia (Piochi et al. 1998), all'inizio dell'anno nella lezione immediatamente successiva allo svolgimento del test di ingresso, l'insegnante è arrivata in classe con un pacco di volantini del supermercato e li ha distribuiti agli alunni divisi in gruppi, chiedendo di trovare gli enti matematici presenti in essi e farne una relazione. C'è stata un'impossibilità da parte degli allievi di realizzare un'attività di questo tipo. Una delle relazioni riconosceva tale

Didattica

Errori/Difficoltà

CONTINUA ESEMPIO

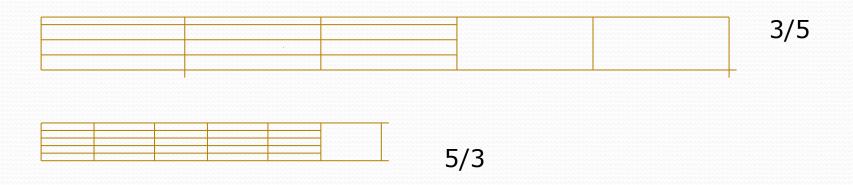
impossibilità, rilevando che gli studenti non sono assolutamente abituati se non ad un insegnante che spiega e dà esercizi per casa: la nuova proposta aveva creato sconcerto: "Io ero abituata a vedere la mia professoressa di matematica che spiegava, e noi a casa dovevamo studiare, ma a fare i gruppi e a interpretare un volantino non ero abituata".

Didattica

Errori/Difficoltà Rappresentazioni grafiche

- Esempio di "rappresentazione grafica" prodotta da alunni di prima superiore con difficoltà di apprendimento) alle prese con quesiti relativi alle frazioni. (Longo, Di Carlo, Ambrosone, ricerca sui processi di rappresentazione formale)
- E' chiesto di confrontare 3/5 e 5/3 . Un allievo esegue il compito in questo modo: Il disegno, però non è significativo in quanto sono utilizzate due diverse unità. L'allievo sa che 3/5 < 5/3 , ma non si accorge dell'incongruenza della rappresentazione con la relazione esistente tra le due frazioni.

difficoltà



Misconoscenze

Definizioni:

- misconoscenze →cause sensate di errori, frutto di conoscenza non di mancanza di conoscenza (coniugi Van Hiele)
- situazione non del tutto o certamente negativa possibile momento di passaggio durante la sistemazione o la costruzione di un concetto matematico

Misconoscenze

Possono essere

- Inevitabili se non dipendono dalla trasposizione didattica ma dipendono dall'esigenza di dover "dire" o "mostrare" qualcosa di non esaustivo per un concetto per poter spiegare il concetto stesso
- <u>Evitabili</u> se dipendono dalla scelta del docente nella trasposizione didattica per la costruzione del modello matematico

Misconoscenze Evitabili

Erronea interpretazioni dell'informazione fornite dal docente all'allievo

Esempio

In Geometria uso improprio di alcuni termini→ orizzontale, verticale, obliquo, laterale legati più ad altri contesti che alla disciplina geometrica

difficoltà

Misconoscenze Evitabili

ORIZZONTALE, VERTICALE, OBLIQUO, LATERALE danno più informazioni sulla posizione dell'oggetto che sull'oggetto caratteristiche concrete percepite dal "mondo reale"

Parallelismo, perpendicolarità, congruenza dei lati e degli angoli sono proprietà assolute dell'oggetto. Nel mondo geometrico non esistono direzioni previlegiate

- Classificazione degli ostacoli (G.Broussean) rispetto all'origine:
- ontogenetica dovuti ai limiti neuro-fisiologici dell'allievo
- didattica dovuti al sistema educativo adottato dal docente

 epistemologica dovuti alla natura della disciplina matematica

Nota

 le difficoltà di natura epistemologica sono inevitabili

 i concetti matematici non sono semplici per loro natura intrinseca ma non è bene banalizzarli

occorre aiutare e spingere l'allievo a superarli

Nota

 Le difficoltà didattiche richiedono attenzione da parte del docente

es difficoltà didattiche legate al linguaggio rispetto a: una domanda, un testo, un enunciato di un problema → il docente deve verificare la comprensione di un linguaggio che utilizza parole sia matematiche sia del linguaggio comune